Mrežne poti in determinante

Katarina Kasunič

Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

10. april 2009

Definicija

Naj bo $M = (m_{ij})$ *realna* $n \times n$ *matrika.*

$$\det M = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) m_{1\sigma(1)} m_{2\sigma(2)} \dots m_{n\sigma(n)}$$

Definicija

Naj bo $M = (m_{ij})$ *realna* $n \times n$ *matrika.*

$$\det M = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) m_{1\sigma(1)} m_{2\sigma(2)} \dots m_{n\sigma(n)}$$

M predstavimo kot poln dvodelni uteženi usmerjeni graf; vrstice matrike M so prva množica vozlišč - $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$, njeni stolpci pa druga - $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, ..., B_n\}$. Utež na povezavi od A_i do B_j ustreza elementu matrike M, ki se nahaja na (i, j)-tem mestu.

Definicija

Naj bo $M = (m_{ij})$ *realna* $n \times n$ *matrika.*

$$\det M = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) m_{1\sigma(1)} m_{2\sigma(2)} \dots m_{n\sigma(n)}$$

M predstavimo kot poln dvodelni uteženi usmerjeni graf; vrstice matrike M so prva množica vozlišč - $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, njeni stolpci pa druga - $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$. Utež na povezavi od A_i do B_j ustreza elementu matrike M, ki se nahaja na (i, j)-tem mestu.

- Leva stran formule je determinanta matrike M.
- Desna stran formule je vsota po vseh sistemih po točkah disjunktnih poti od $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$; sistem $\mathcal{P}_\sigma$ sestavljajo poti $A_i \to B_{\sigma(i)}$ s svojimi utežmi $w_i = m_{i\sigma(i)}, i = 1, \dots, n$.

Gessel-Viennotova lema

Lema

Naj bo $G = (V, E)$ končen acikličen utežen usmerjen graf, $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ in $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, ..., B_n\}$ množici vozlišč ter M matrika poti od $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$.

Potem je

$$\det M = \sum_{\mathcal{P}} sgn(\mathcal{P}) w(\mathcal{P}),$$

kjer je $\mathcal{P}$ ***sistem po točkah disjunktnih poti****.*

Kakšna je matrika poti in kaj je utež sistema $\mathcal{P}$?

Gessel-Viennotova lema

Lema

Naj bo $G = (V, E)$ končen acikličen utežen usmerjen graf, $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ in $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, ..., B_n\}$ množici vozlišč ter M matrika poti od $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$.

Potem je

$$\det M = \sum_{\mathcal{P}} sgn(\mathcal{P}) w(\mathcal{P}),$$

kjer je $\mathcal{P}$ ***sistem po točkah disjunktnih poti***.

Kakšna je matrika poti in kaj je utež sistema $\mathcal{P}$?

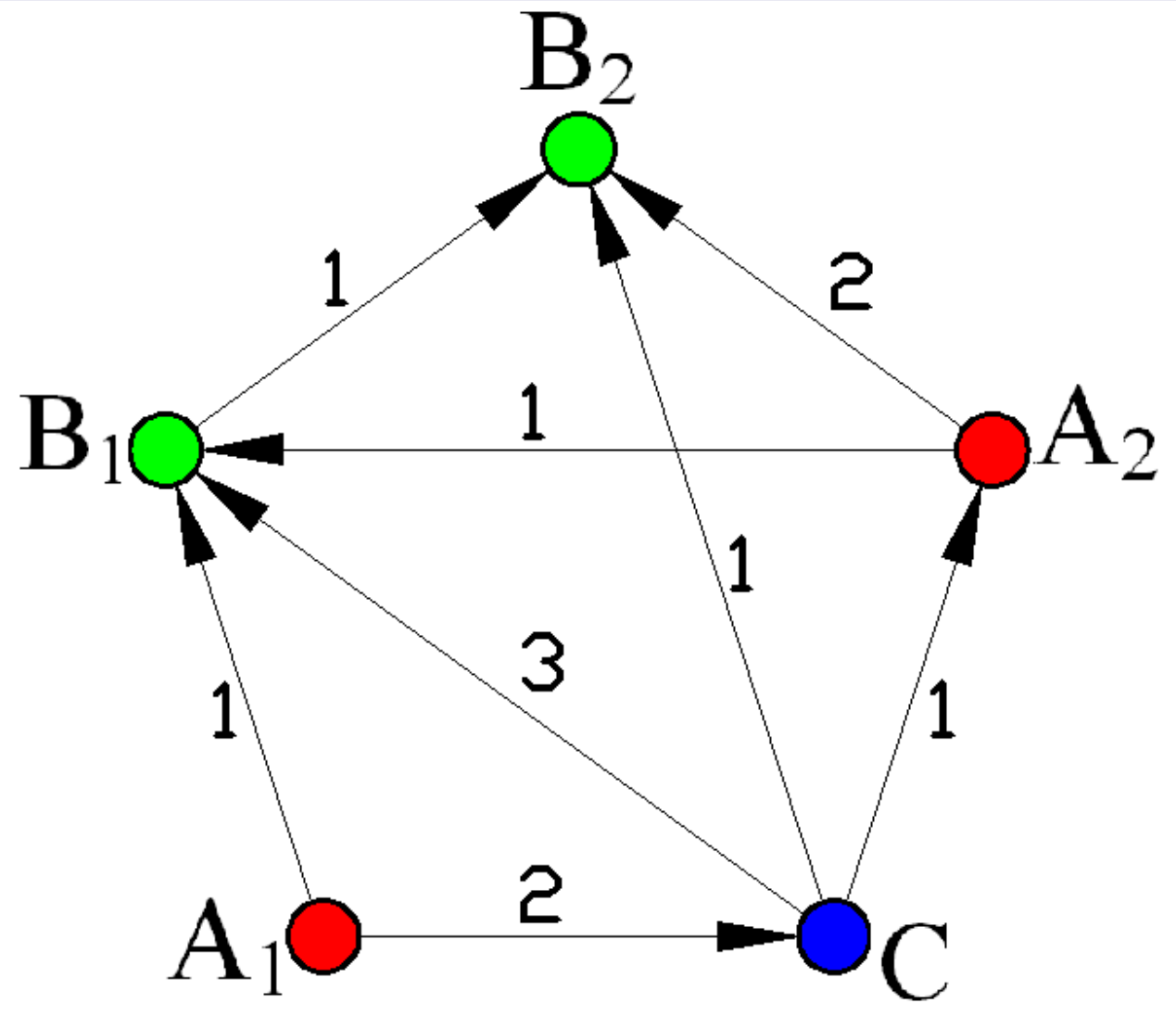
$\mathcal{P}$ sestavlja n poti $P_i : A_i \to B_{\sigma(i)}$;

$e \in E$, $w(e)$ utež povezave $e \Rightarrow w(P_i) := \prod_{e \in P_i} w(e) \Rightarrow$

$$w(\mathcal{P}) = \prod_{i=1}^{n} w(P_i)$$

$$M = (m_{ij}); m_{ij} := \sum_{P: A_i \to B_j} w(P)$$

Zgled



Dokaz Gessel-Viennotove leme

Dokaz

Dokaz Gessel-Viennotove leme

Dokaz

1. $$\det M = \sum_{\mathcal{P}} sgn(\mathcal{P}) w(\mathcal{P}),$$

*kjer $\mathcal{P}$ teče po **vseh** sistemih poti (ne nujno disjunktnih!).*

Dokaz Gessel-Viennotove leme

Dokaz

1. $$\det M = \sum_{\mathcal{P}} sgn(\mathcal{P}) w(\mathcal{P}),$$

   *kjer $\mathcal{P}$ teče po **vseh** sistemih poti (ne nujno disjunktnih!).*

2. $$\sum_{\mathcal{P} \in N} sgn(\mathcal{P}) w(\mathcal{P}) = 0,$$

   *kjer je N množica vseh sistemov poti, ki **niso** disjunktni po točkah.*

Dokaz Gessel-Viennotove leme

Dokaz

1. $$\det M = \sum_{\mathcal{P}} sgn(\mathcal{P}) w(\mathcal{P}),$$

   *kjer $\mathcal{P}$ teče po **vseh** sistemih poti (ne nujno disjunktnih!).*

2. $$\sum_{\mathcal{P} \in N} sgn(\mathcal{P}) w(\mathcal{P}) = 0,$$

   *kjer je N množica vseh sistemov poti, ki **niso** disjunktni po točkah.*

   - *Involucija $\pi : N \to N$:*
     $w(\pi\mathcal{P}) = w(\mathcal{P})$ in $sgn(\pi\mathcal{P}) = -sgn(\mathcal{P})$

Cauchy-Binetova formula

Izrek

Naj bo P $(r \times s)$-matrika in Q $(s \times r)$-matika, $r \leq s$.
Potem je

$$\det(PQ) = \sum_{\mathcal{Z}} (\det P_{\mathcal{Z}})(\det Q_{\mathcal{Z}}),$$

kjer je $P_{\mathcal{Z}}$ $(r \times r)$-podmatrika matrike P s stolpci $\mathcal{Z}$ in $Q_{\mathcal{Z}}$ $(r \times r)$-podmatrika matrike Q s pripadajočimi vrsticami $\mathcal{Z}$.

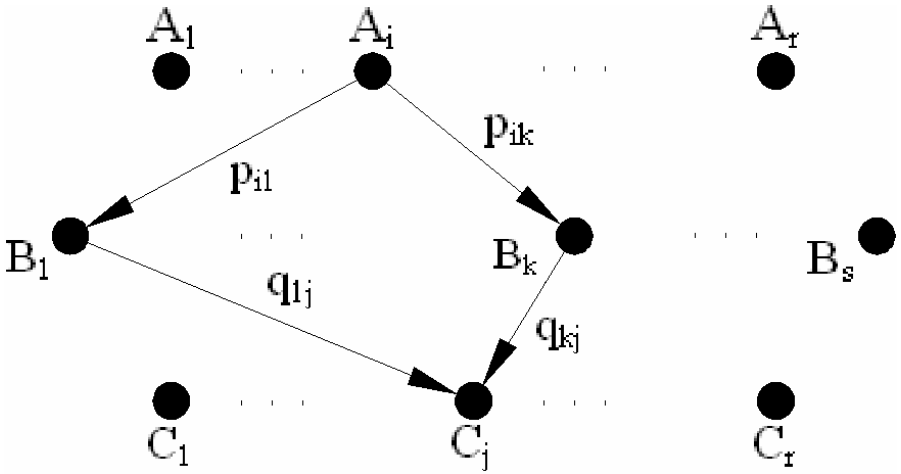
Cauchy-Binetova formula

Izrek

Naj bo P $(r \times s)$-matrika in Q $(s \times r)$-matika, $r \leq s$.
Potem je

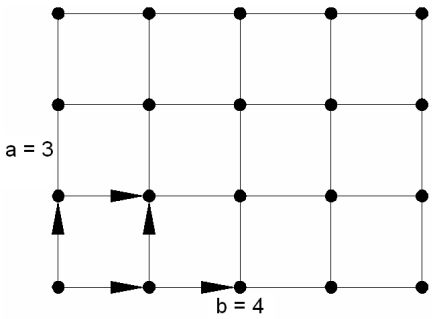
$$\det(PQ) = \sum_{\mathcal{Z}} (\det P_{\mathcal{Z}})(\det Q_{\mathcal{Z}}),$$

kjer je $P_{\mathcal{Z}}$ $(r \times r)$-podmatrika matrike P s stolpci $\mathcal{Z}$ in $Q_{\mathcal{Z}}$ $(r \times r)$-podmatrika matrike Q s pripadajočimi vrsticami $\mathcal{Z}$.



Mrežne povezave

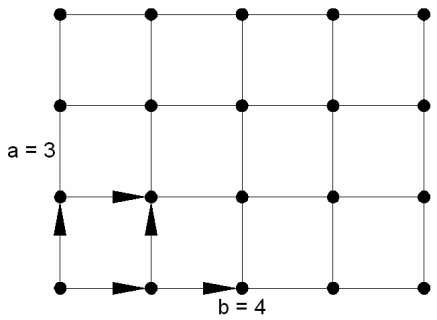
Imamo mrežo velikosti $a \times b$. Pot začnemo v spodnjem levem kotu, naš cilj pa je zgornji desni kot. Dovoljeni premiki: $\uparrow$ in $\rightarrow$.



Takih poti je $\begin{pmatrix} a+b \\ a \end{pmatrix}$.

Mrežne povezave

Imamo mrežo velikosti $a \times b$. Pot začnemo v spodnjem levem kotu, naš cilj pa je zgornji desni kot. Dovoljeni premiki: $\uparrow$ in $\rightarrow$.



Takih poti je $\begin{pmatrix} a+b \\ a \end{pmatrix}$. Mrežo 'vložimo' v Pascalov trikotnik:

- začetna točka A_i s koordinatami $(0, -a_i)$ in
- končna točka B_j s koordinatami $(-b_j, -b_j)$.

Število poti med tema točkama je $\begin{pmatrix} a_i \\ b_j \end{pmatrix}$. Matrika binomov je torej matrika poti $\Rightarrow$ Gessel-Viennotova lema.